

Einleitung

Ziel der Arbeit ist es die Verformung einer dünnen Platte effektiv zu beschreiben. Obwohl für den rein elastischen Fall bereits eine reichhaltige Theorie existiert, gibt es bisher nur wenige Ergebnisse, die das Auftreten von Plastizität berücksichtigen. In [1] wollen wir Antwort auf folgenden Fragen geben:

- Wie verhält sich die Verformung der Platte, wenn die Dicke gegen Null konvergiert?
- Wie kann die Verformung im Grenzfall beschrieben werden?

Ausgangssituation

Wir betrachten eine Platte der Form $\Omega^\alpha = \omega \times (-\alpha, \alpha)$. Dabei ist $\omega \subset \mathbb{R}^2$ eine offene, konvexe, beschränkte Menge mit Lipschitz-Rand.

Das Verhalten des Körpers wird durch $w^\alpha = (u^\alpha, p^\alpha) \in W^{1,1}(0, T; H)$ beschrieben, wobei der Zustandsraum $H = H^1(\Omega^\alpha, \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega^\alpha, \mathbb{R}^{3 \times 3}_{\text{symm}})$. Dabei gibt u die Verformung und p die plastische Spannung der Platte an. Es ist w^α die eindeutige Lösung der Energieformulierung:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\alpha(w^\alpha(t), t) &\leq \mathcal{E}^\alpha(z, t) + \mathcal{D}^\alpha(w^\alpha(t), z) \quad \forall z \in H \\ \mathcal{E}^\alpha(w^\alpha(t), t) + \text{diss}_{\mathcal{D}^\alpha}([0, t], w^\alpha) &= \mathcal{E}^\alpha(0, w^\alpha(0)) + \int_0^t \partial_2 \mathcal{E}^\alpha(w^\alpha(s), s) \end{aligned}$$

Hierbei beschreibt \mathcal{E}^α die Energie eines Zustands und \mathcal{D}^α die Dissipation die aufgewendet werden muss um von einem Zustand zu einem anderen zu gelangen. Die Energie zerfällt in drei Teile: den elastischen und den plastischen Anteil sowie die dem Körper zugeführte äußere Arbeit

$$\mathcal{E}^\alpha(w, t) = \mathcal{E}_{\text{elast}}^\alpha(w) + \mathcal{E}_{\text{plast}}^\alpha(w) + W_{\text{appl}}^\alpha(w, t)$$

Der Superskript α zeigt an, dass die Funktionale und Funktionen über dem Gebiet Ω^α definiert sind.

Vorgehensweise

In dieser Arbeit folgen wir einem klassischem Ansatz aus der Elastizitätstheorie (vgl. [2]). Unser Vorhaben ist wie folgt:

1. Skallierung des Problems auf die Referenzkonfiguration $\Omega = \omega \times (-1, 1)$. Dazu werden die zugehörigen Energie- und Dissipationsfunktionale $\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{D}_\alpha$ und skallierten Lösungen w_α hergeleitet, die nun über Ω definiert sind.
2. Berechnung der Grenzfunktionale $\mathcal{E}_0, \mathcal{D}_0$ als Γ -Grenzwert von $\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{D}_\alpha$ für $\alpha \rightarrow 0$.
3. Konvergenz von w_α gegen die durch die Grenzfunktionale bestimmte Lösung w_0 .

Γ -Konvergenz der Funktionale

Theorem: Es existieren Funktionale $\mathcal{E}_0 : H \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ und $\mathcal{D}_0 : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$, sodass

$$\Gamma\text{-}\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{E}_\alpha = \mathcal{E}_0 \quad \wedge \quad \Gamma\text{-}\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{D}_\alpha = \mathcal{D}_0$$

bzgl. der starken Topologie auf $H \times [0, T]$ bzw $H \times H$. Außerdem gilt

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_{KL} + \mathcal{E}_{\text{plast},0} + W_{\text{appl}}$$

Hierbei ist \mathcal{E}_{KL} der elastische Anteil der Grenzenergie, der aus der Kirchhoff-Love Theorie bekannt ist. Der plastische Anteil der Grenzenergie $\mathcal{E}_{\text{plast},0}$ ist eine quadratische Funktion der plastischen Spannung. In [1] wurde zudem die explizite Form von \mathcal{D}_0 und \mathcal{E}_0 berechnet.

Konvergenz der Lösungen

Mittels eines Resultates aus [3] erhalten wir: Die durch $\mathcal{E}_0, \mathcal{D}_0$ erzeugte Energieformulierung hat eine eindeutige Lösung w_0 .

Schritt 3 unseres Plans konnte nicht in voller Allgemeinheit bewiesen werden. Es wurde jedoch gezeigt:

Theorem: Falls

$$\alpha^{-1}(p_\alpha)_{13}, \alpha^{-1}(p_\alpha)_{23} \rightarrow 0 \text{ in } L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$$

dann gilt:

$$\begin{aligned} w_\alpha &\rightarrow w_0 \text{ in } L^\infty(0, T; H) \\ w_\alpha &\rightarrow w_0 \text{ in } W^{1,1}(0, T; H) \end{aligned}$$

Beweisskizze: Der Beweis orientiert sich an [4] und besteht aus den folgenden Schritten:

- (Schwache) Folgenkompaktheit von w_α in $C(0, T; H)$ bzw. $W^{1,1}(0, T; H)$
- Für alle stabilen Folgen mit $\alpha^{-1}(p_\alpha)_{13}, \alpha^{-1}(p_\alpha)_{23} \rightarrow 0$ ist der Grenzwert stabil bzgl $\mathcal{E}_0, \mathcal{D}_0$
- Mithilfe der ersten beiden Schritte und der Γ -Konvergenz zeigen wir, dass für $\alpha \rightarrow 0$ jeder Häufungspunkt von w_α die Energieformulierung löst.

Referenzen

- [1] T. Roche. Asymptotic Analysis of an Elastoplastic Plate. *Bachelor's Thesis*, TU München, 2008.
- [2] P. Ciarlet. *Mathematical Elasticity - Theory of Plates*. North Holland, 1997.
- [3] A. Mielke und F. Theil. On rate-independent hysteresis models. *Nonl. diff. Eqns. Appl.*, 11:151-189, 2004.
- [4] A. Mielke, T. Roubiček und U. Stefanelli. Γ -limits and relaxations for rate-independent evolutionary processes. *Calc. Var.*, 31:387-416, 2008.