Invariante Mannigfaltigkeiten und der Conley-Index

Christian Reinhardt, Prof. Dr. Oliver Junge
Zentrum Mathematik, Technische Universität München
Lehrstuhl für Wissenschaftliches Rechnen, M3

Abstract

In dieser Arbeit untersuchen wir invariante Mannigfaltigkeiten Diskreter Dynamischer Systeme mit numerischen Methoden, die auf Algebraischer Topologie basieren. Wir beschreiben zunächst eine allgemeine Methode, um die Existenz von Schnittpunkten stabiler und instabiler Mannigfaltigkeiten von hyperbolischen Fixpunkten in die Existenz bestimmter verbindender Orbits im Projektifizierten System zu übersetzen. Der homologische Conley-Index bietet dann ein geeignetes Werkzeug die Existenz dieser verbindenden Orbits nachzuweisen. Als Anwendung betrachten wir die Frage nach der Integrabilität der Cohen-Colline de Verdière Abbildung.

Diskrete Dynamische Systeme

Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $f: M \to M$ ein Diffeomorphismus. Unter dem **Orbit** $O(x,f)$ eines Punktes $x \in M$ verstehen wir eine Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset M$ mit den Eigenschaften:

1. $f^0(x) = x = x_0$
2. $x_{k+1} = f(x_k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$

Diese Iterationsvorschrift definiert ein **Diskretes Dynamisches System** auf M.

Ein Punkt $x_0 \in M$ heisst nun Fixpunkt von f, falls $f(x_0) = x_0$. x_0 wird periodischer Punkt der Periode k genannt, falls $f^k(x_0) = x_0$ und $f^l(x_0) \neq x_0$ für alle $0 < l < k$. Für einen hyperbolischen k-periodischen Punkt definiert man für $\sigma = s, u$ die **stabile respektive instabile Mannigfaltigkeit** zu

$$W^\sigma(O(p,f)) = \bigcup_{j=0}^{k-1} W^\sigma(f^j(p), f^k)$$

wobei man für einen hyperbolioschen Fixpunkt p $W^\sigma(p) = \{x \in M : \lim_{k\to\pm\infty} f^k(x) = p\}$ definiert.

Das Projektifizierte System

Grundlage der Projektifizierung bildet die Erweiterung der Abbildung f auf das **Tangentialbündel** TM von M. Durch Ersetzen der Tangentialräume durch die **Projektiven Räume** über den Tangentialräumen, erhält man weiterhin das **Projektive Bündel** $PM = \{(p,[v]) : p \in M, [v] \in PT_pM\}$ und die darauf induzierte Abbildung

$$PF : \begin{cases} PM \to PM \\ (p,[v]) \mapsto (f(p), [Tf_p v]) \end{cases}$$

Hyperbolische Fixpunkte induzieren durch Projektion ihrer stabilen respektive instabilen Unterräume zwei Teilmengen P^u und P^s im Projektiven Bündel. Diese erweiterte Untersuchung der Dynamik liefert nun das folgende Theorem. Hierbei bezeichne $C(A,B;S)$ die Menge der verbindenden Orbits von A nach B unter f, die in der Menge S verlaufen.

Satz 1. *(Arai, 2006) Seien p_1 und p_2 zwei hyperbolische Fixpunkte und es gelte $dim(W^u(p_1)) + dim(W^s(p_2)) = n$. Existiert nun eine kompakte Menge $S_1 \subset PM$ mit $C(P_1^u, P_2^s; S_1) \neq \emptyset$ so besitzten $W^u(p_1)$ und $W^s(p_2)$ einen tangentialen Berührpunkt. Andererseits folgt aus der Existenz einer kompakten Menge $S_2 \subset PM$ mit $C(P_1^u, P_2^u; S_2) \neq \emptyset$ ein transversaler Schnittpunkt.*

Die Cohen-Colline de Verdière-Abbildung

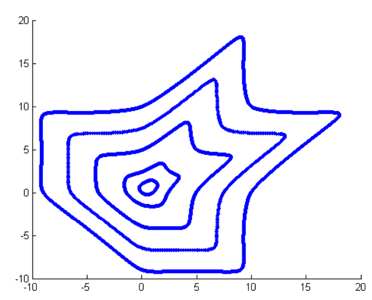
Die **Cohen-Colline de Verdière-Abbildung** ist ein planarer Diffeomorphismus, der durch die folgende Abbildungsvorschrift gegeben ist:

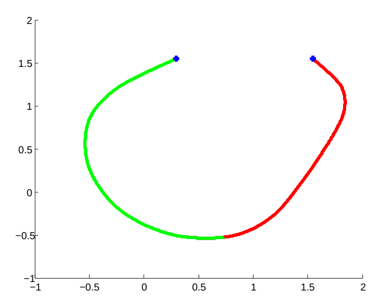
$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x_1^2+1} - x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Es ist bisher nicht bekannt, ob diese Abbildung integrabel ist, d.h. ob eine nichtkonstante Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ existiert mit

$$T(f(x)) = T(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

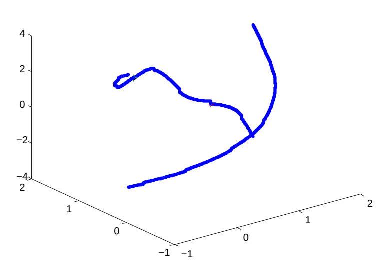
Interessanterweise legen numerische Simulationen die Integrabilität zunächst nahe. Andererseits besteht aufgrund der Existenz des hyperbolischen Periode 14 Punktes $x_{per} = \begin{pmatrix} 1.5487 \\ 1.5487 \end{pmatrix}$ die Möglichkeit transversaler Schnittpunkte seiner stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten. Numerische Simulationen lassen auf den ersten Blick vermuten, dass Schnittpunkte existieren, diese aber tangential sind.

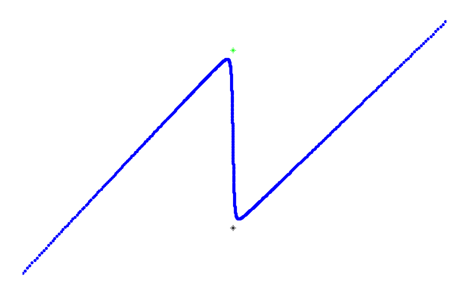




Die Untersuchung der Dynamik auf dem Projektiven Bündel $P\mathbb{R}^2$ bringt neues Licht in diese Fragestellungen. Auf dem Lambda-Lemma basierende Argumente führen zu folgender Vermutung:

> Es existieren transversale Durchschnitte der Mannigfaltigkeiten $W^u(f^i(x_{per}), f^{14})$ und $W^s(f^j(x_{per}), f^{14})$ für alle $i,j \in \{0,\dots,13\}$. Daneben gibt es ebenso tangentiale Berührpunkte der Mannigfaltikeiten $W^u(f^i(x_{per}), f^{14})$ und $W^s(f^i(x_{per}), f^{14})$ für $i \in \{0,\dots,13\}$.





Der Conley-Index

Der **homologische Conley-Index** ist eine algebraische Invariante einer isolierten invarianten Menge.

Definition 1. *Sei S eine isolierte invariante Menge für f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und (P_1, P_0) ein kubisches Indexpaar, dass S isoliert, d.h. $S = Inv(cl(P_1 \setminus P_0))$. So bezeichnen wir mit*

$$CH_*(S) = (H_*(P_1,P_0), [(f_{P*})]_S)$$

den (homologischen) Conley-Index von S. Hierbei bezeichne $[(f_{P*})]_S$ die Shift-Äquivalenzklasse der in relativer Homologie induzierten Abbildung.

Der Conley-Index ist nun ein mächtiges Werkzeug, um die Existenz verbindender Orbits nachzuweisen.

Satz 2. *(Arai, 2006) Sei N eine isolierende Umgebung für den Diffeomorphismus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, derart, dass N die disjunkte Vereinigung zweier isolierender Umgebungen N_1 und N_2 ist mit der Eigenschaft, dass $f(N_2) \cap N_1 = \emptyset$ Gilt nun $CH_*(Inv(N)) \neq CH_*(Inv(N_1)) \otimes CH_*(Inv(N_2))$ als Shift-Äquivalenzklassen, so existiert ein verbindender Orbit zwischen $Inv(N_1)$ und $Inv(N_2)$.*

Die Verwendung **kubischer Homologie** ermöglicht eine algorithmische Berechnung des Conley-Indexes.

Algorithmus

Der folgende Algorithmus ermöglicht einen **rigorosen Beweis** des ersten Teils obiger Vermutung. Um den zweiten Teil zu beweisen muss P_1^u durch P_0^s ersetzt werden.

1. Berechne eine kubische Überdeckung X des verbindenden Orbits von P_0^u nach P_1^u.
2. Bestimme kombinatorisch isolierende Umgebung $\mathcal{S}$, sodass $N = |Inv(\mathcal{S}, \mathcal{PF}^{14})|$ eine isolierende Umgebung für Pf^{14} ist, die $Inv(X, \mathcal{PF}^{14})$ enthält. Setzte N_2 als die Komponente von N, die P_1^u enthält und $N_1 = N \setminus N_2$
3. Berechne $CH_*(Inv(N))$, $CH_*(Inv(N_1))$, $CH_*(Inv(N_2))$
4. Überprüfe $Inv(N_i) = P_{i-1}^u \quad (i = 1,2)$
5. Überprüfe

$$CH_*(Inv(N)) \neq CH_*(Inv(N_1)) \otimes CH_*(Inv(N_2))$$

Literatur

1. Rigorous Computations of Homoclinic Tangencies, SIAM Journal of Applied Dynamical Systems, 5, 2006
2. Computational Homology, Tomasz Kaczynski,Konstantin Mischaikow, Marian Mrozek, Springer-Verlag New York, 2004