Orthogonale Netze mit separierten Variablen

Abschlussarbeit des ersten TopMath-Jahres von

Thorsten Knott

Betreuer: Prof. Dr. Yuri B. Suris

Technische Universität München, Fakultät für Mathematik

Forschungseinheit Dynamische Systeme

Abstract

Die *diskrete Differentialgeometrie* ist ein Teilgebiet der Mathematik das an der Grenze zwischen diskreter Geometrie und klassischer Differentialgeometrie, der Theorie mehrdimensionaler gekrümmter Flächen, anzusiedeln ist. Den kontinuierlichen Flächen der Differentialgeometrie werden dabei diskrete Gitternetze gegenübergestellt. Es zeigt sich, dass bestimmte Klassen solcher Flächen mit gewissen Eigenschaften mit Klassen diskreter Netze zu identifizieren sind, die entsprechende elementargeometrische Bedingungen erfüllen. Erstgenannte können dabei durch passend gewählte Folgen der diskreten Analoga mit feiner werdender Gitterweite approximiert werden, wodurch sich deren klassifizierende Eigenschaften als direkte Konsequenz der diskreten Geometrie der Gitternetze im Grenzübergang ergeben. Dieses Vorgehen führt nicht nur zu einem besseren Verständnis des eigentlichen Ursprungs vieler Theoreme der klassischen Differentialgeometrie, sondern hat darüber hinaus auch noch *grundlegende* Anwendungen insbesondere in der Theorie integrabler dynamischer Systeme.

Inhalt der Arbeit ist die Betrachtung der Klasse der planaren orthogonalen Koordinatensysteme mit separierten Variablen (Definition s.u.) und zweier dazugehöriger Diskretisierungsansätze im oben genannten Sinne. Neben der Standarddiskretisierung orthogonaler Netze durch Kreisnetze, die auf die vorliegende speziellere Klasse angewandt sowie algorithmisch und numerisch umgesetzt wird, ist das ein sich daraus kanonisch ergebender Ansatz, der zwar, wie sich herausstellt, eine mathematisch ansprechende Beschreibung zulässt, allerdings nicht in allen Fällen eine befriedigende Approximation zulässt.

Kontinuierliche SV-Systeme

Konjugierte Netze sind Abbildungen $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, die durch die Forderung

$$\partial_i \partial_j f \in \operatorname{span}\{\partial_i f, \partial_j f\}$$

charakterisiert werden. Solch eine Abbildung f heißt orthogonales Netz, falls die Parameterlinien paarweise senkrecht aufeinander stehen

$$\partial_i f \perp \partial_j f, \quad i \neq j,$$

und dann im Falle $m = n$ orthogonales Koordinatensystem, wenn sie zusätzlich ein (lokaler) Diffeomorphismus ist. Planare orthogonale Netze mit separierten Variablen ("SV-Systeme") sind nun solche zweidimensionalen orthogonalen Koordinatensysteme, die sich als

$$f(u,v) = (x_1(u)\cdot x_2(v),\ y_1(u)\cdot y_2(v)),$$

mit geeigneten rellen Funktionen $x_1, x_2, y_1, y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ schreiben lassen. Die planaren SV-Systeme werden durch folgendes Resultat vollständig klassifiziert.

Satz. (Klassifikation von SV-Systemen) Sei $f : I \times J \to \mathbb{R}^2$ ein SV-System auf dem Produkt zweier Intervalle I, J. Setzt man $\tau(u,v) = (v,u)$, so gibt es zwei Diffeomorphismen $\varphi_u : \widetilde{I} \to I$, $\varphi_v : \widetilde{J} \to J$, so dass entweder

$$\widetilde{f} = f \circ (\varphi_u, \varphi_v) : \widetilde{I} \times \widetilde{J} \to \mathbb{R}^2,$$

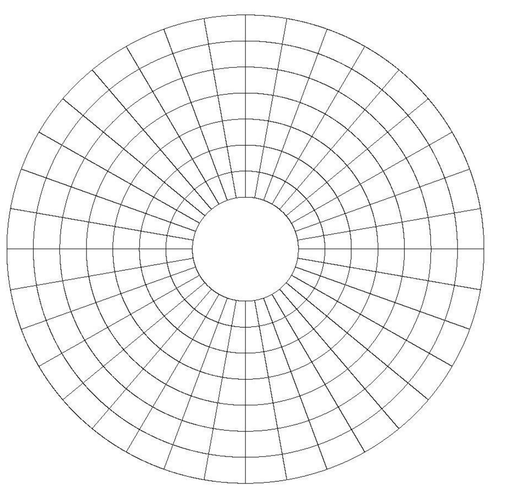
oder eine der Abbildungen $\widetilde{f} \circ \tau$, $\tau \circ \widetilde{f}$, $\tau \circ \widetilde{f} \circ \tau$ (jeweils abgekürzt als g) eine der folgenden drei Formen annimmt:

(1) $g(u,v) = (u,v)$, i.e. g ist das kartesische Koordinatensystem,

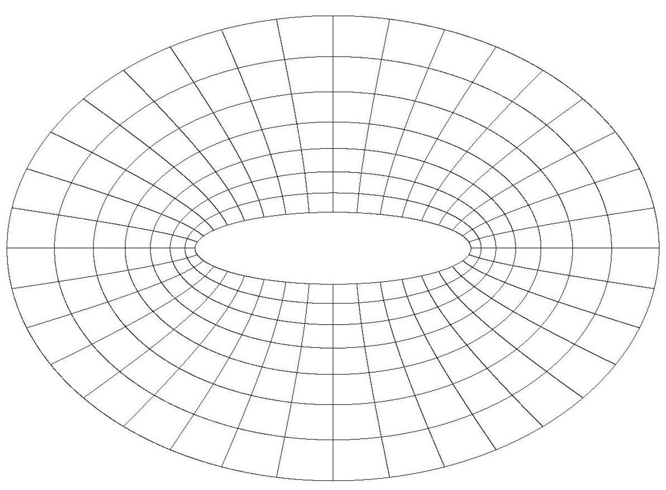
(2) $g(u,v) = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u \sin v \end{pmatrix}$, i.e. g ist das Polarkoordinatensystem,

(3) $g(u,v) = \kappa \begin{pmatrix} \cos u \cosh v \\ \sin u \sinh v \end{pmatrix}$ mit einer reellen Konstante $\kappa > 0$, i.e. g ist ein elliptisches Koordinatensystem.

Kurz: Es gibt - bis auf Reparametrisierungen und Vertauschen der Parameter - genau die drei oben genannten planaren SV-Systeme.



Polarkoordinatensystem (2)



Elliptisches Koordinatensystem (3)

Diskrete orthogonale Netze

Da die Klasse der (kontinuierlichen) orthogonalen Netze invariant unter Möbiustransformationen ist, ist es naheliegend, dass ein diskretes Analogon ebenfalls diese Eigenschaft haben sollte. Eine entsprechende, und wie sich herausstellt auch intrinsisch sinnvolle Definition ist dann Folgende:

Ein diskretes Netz

$$f = f^\varepsilon : \varepsilon\mathbb{Z}^m \to \mathbb{R}^n$$

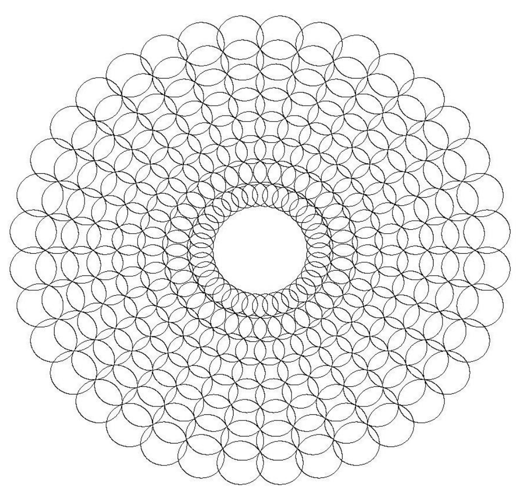
nennt man diskretes orthogonales Netz oder zirkuläres Netz, wenn je vier Punkte $f, \tau_i f, \tau_j f, \tau_i\tau_j f$ eines elementaren Quadrats auf einem gemeinsamen Kreis liegen (dabei bezeichnet $\tau_i f(u) = f(u + \varepsilon e_i)$).

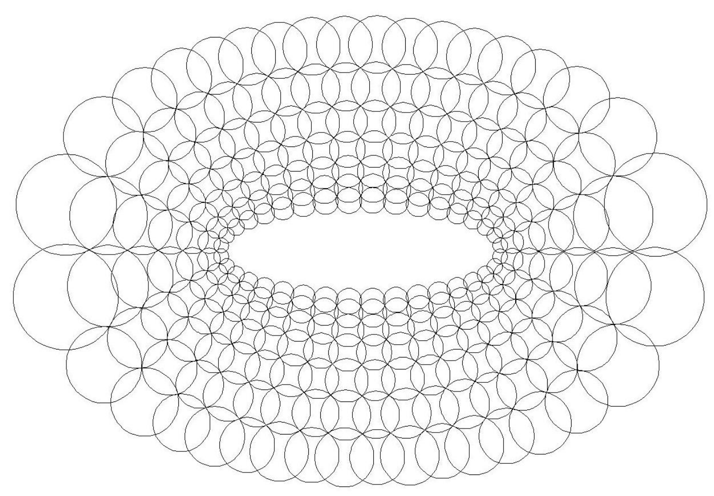
Orthogonale Diskretisierung von SV-Systemen

Kontinuierliche orthogonale Netze, insbesondere also auch SV-Systeme entstehen als Grenzfall Gitterweite $\to 0$ aus diskreten orthogonalen Netzen. Zu jedem kontinuierlichen orthogonalen Netz $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ gibt es eine ein-Parameterfamilie von diskreten Netzen $f^\varepsilon : \varepsilon\mathbb{Z}^m \to \mathbb{R}^n$, so dass für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^m$ und jeden Multiindex α ein $c_{K,\alpha}$ existiert, so dass mit $K^\varepsilon = K \cap \varepsilon\mathbb{Z}^m$ und $\delta_i g = \tau_i g - g$ gilt

$$\sup_{u \in K^\varepsilon} \|\delta(f^\varepsilon - f)(u)\| \leq c_{K,\alpha}\varepsilon.$$

Der in der Arbeit verwendete Algorithmus zur expliziten Berechnung einer Approximation f^ε an ein gegebenes orthogonales Netz f macht Gebrauch von der linearisierten Einbettung der Möbiusgeometrie des $\mathbb{R}^n$ in den Minkowskiraum $\mathbb{R}^{n+1,1}$ und deren Darstellung durch die zugehörige Cliffordalgebra $\mathcal{C}\ell_{n+1,1}$. Bei dessen Beschreibung wird insbesondere eine numerisch sehr effektive Möglichkeit zur Berechnung sogenannter Pin-Rahmen orthogonaler Netze hergeleitet.





Diskretisierungen des Polarkoordinatensystems und des elliptischen Koordinatensystems für $\varepsilon = \pi/18$

Diskrete SV-Systeme

Die Standarddiskretisierung für orthogonale Netze liefert zwar Gitternetze, die die kontinuierlichen SV-Systeme approximieren, allerdings ohne auf deren sehr spezielle Eigenschaften einzugehen. Ein hier näher untersuchter naheliegender Ansatz ist der, diskrete Analoga der SV-Systeme unter den diskreten SV-Systemen zu suchen, d.h den orthogonalen Netzen $f : \varepsilon\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^2$, die sich als $f(u,v) = (x_1(u)\cdot x_2(v),\ y_1(u)\cdot y_2(v))$ schreiben lassen.

Für die kartesischen und Polarkoordinaten ist die Diskretisierung trivial (Einschränkungen auf $\varepsilon\mathbb{Z}^2$ sind bereits diskrete SV-Systeme). Andernfalls führen die genannten Bedingungen auf Evolutionsgleichungen

$$\bar{x}_i = x_i \frac{\xi^2 + (1-d)\bar{\xi}\xi - b}{\bar{\xi}^2 + (1-d)\bar{\xi}\xi - b} = x_1\left(1 + \frac{\bar{\xi}^2 - \xi^2}{b + (d-1)\bar{\xi}\xi - \bar{\xi}^2}\right),$$

und biquadratische Gleichungen

$$(\bar{\xi}^2 + \xi^2) + \bar{\xi}^2\xi^2 cd + \bar{\xi}\xi(ad + bc + 2) + ab = 0,$$

wobei $\xi = y_i/x_i$ und $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Satz. (Reelle Parametrisierung von symmetrischen Biquadratiken) Jede reelle symmetrische Biquadratik

$$\bar{\zeta}^2\zeta^2 + \kappa\gamma(\bar{\zeta}^2 + \zeta^2) + 2\kappa\gamma\tau\bar{\zeta}\zeta + \sigma = 0,$$

mit $|\kappa| = |\sigma| = 1$, $\gamma > 0$ besitzt stets eine Parametrisierung durch Jacobische elliptische Funktionen. Diese hat die Form

$$(\zeta, \bar{\zeta}) = (\zeta(u), \zeta(u \pm t)), \ u \in \mathbb{R}$$

mit einer (evtl. Modulartransformierten) Jacobischen elliptischen Funktion $\zeta(u)$ und einer Konstante $t \in \mathbb{R}$, die sich durch ein elliptisches Integral explizit angeben lässt.

Eine entsprechende Liste aller Parametrisierungen findet sich in der Arbeit. Damit können die Evolutionsgleichungen explizit integriert werden. Unter den Lösungen findet man keine diskreten Analoga des elliptische Koordinatensystems, so dass dieser Ansatz ungeeignet zur Diskretisierung von SV-Systemen ist.