

Zusammenfassung

Die bei Anwendung des iterativen proportionalen Anpassungsverfahrens errechnete Folge skaliertter Matrizen wird untersucht. Für den Fall einer beliebigen zweizeiligen oder zweiseptigen Gewichtungsmatrix wird eine maximale Anzahl von zwei auftretenden Häufungspunkten gezeigt. Für beliebige Gewichtungsmatrizen wird eine Hypothese bezüglich des Auftretens von maximal zwei Häufungspunkten formuliert und es werden drei Beweisansätze präsentiert.

Biproportionales Anpassungsproblem

Definition (Biproportionales Anpassungsproblem). Sei $A = ((a_{ij}))$ eine $k \times \ell$ -Matrix mit nichtnegativen Einträgen, deren Zeilen sowie Spalten jeweils mindestens einen positiven Eintrag enthalten, und seien $r = (r_1, \dots, r_k)$ sowie $s = (s_1, \dots, s_\ell)$ Vektoren mit positiven Einträgen. Dann nennen wir (A, r, s) eine **Instanz des biproportionalen Anpassungsproblems**. A heißt die **Gewichtungsmatrix**, r und s die **Zeilen- beziehungsweise Spaltenmarginalien**.

Definition (Biproportionale Limes-Anpassung). Sei (A, r, s) eine Instanz des biproportionalen Anpassungsproblems. Dann heißt eine $k \times \ell$ -Matrix $B = ((b_{ij}))$ eine **biproportionale Limes-Anpassung**, wenn Folgen echt positiver Zeilendivisoren $x_i(1), x_i(2), \dots$ sowie Folgen echt positiver Spaltendivisoren $y_j(1), y_j(2), \dots$ existieren, sodass für sämtliche Einträge in B

$$b_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a_{ij}}{x_i(t)y_j(t)}$$

gilt und die Gleichungen $b_{i+} = r_i$ für sämtliche Zeilen i und die Gleichungen $b_{+j} = s_j$ für sämtliche Spalten j erfüllt werden.

Iteratives proportionales Anpassungsverfahren

In Ermangelung einer geschlossenen Formel kommt bei der Berechnung der biproportionalen Limes-Anpassung einer Instanz (A, r, s) des biproportionalen Anpassungsproblems üblicherweise das iterative proportionale Anpassungsverfahren zum Einsatz.

Hierbei wird ausgehend von der Gewichtungsmatrix A eine Folge skaliertter Matrizen $A(1), A(2), A(3), \dots$ wie folgt errechnet:

- **Schritt 1** errechnet für sämtliche Zeilen i sogenannte inkrementelle Zeilendivisoren $\rho_i(0) = a_{i+}/r_i$, um die Zeilensummen an die jeweiligen Zeilenmarginalien anzupassen: $a_{ij}(1) = a_{ij}/\rho_i(0)$.
- **Schritt 2** errechnet für sämtliche Spalten j sogenannte inkrementelle Spaltendivisoren $\sigma_j(1) = a_{+j}(1)/s_j$, um die Spaltensummen an die jeweiligen Spaltenmarginalien anzupassen: $a_{ij}(2) = a_{ij}(1)/\sigma_j(1)$.
- **Ungerade Schritte $t + 1$** errechnen für sämtliche Zeilen i inkrementelle Zeilendivisoren $\rho_i(t) = a_{i+}(t)/r_i$, um die Zeilensummen an die jeweiligen Zeilenmarginalien anzupassen: $a_{ij}(t + 1) = a_{ij}(t)/\rho_i(t)$.
- **Gerade Schritte $t + 2$** errechnen für sämtliche Spalten j inkrementelle Spaltendivisoren $\sigma_j(t + 1) = a_{+j}(t + 1)/s_j$, um die Spaltensummen an die jeweiligen Spaltenmarginalien anzupassen: $a_{ij}(t + 2) = a_{ij}(t + 1)/\sigma_j(t + 1)$.

Neben den inkrementellen Divisoren werden für alle geraden Schritte t auch kumulative Divisoren

$$x_i(t) := x_i(t - 1) := \rho_i(0) \cdot \rho_i(2) \cdot \rho_i(4) \cdot \dots \cdot \rho_i(t - 2) \text{ sowie} \\ y_j(t + 1) := y_j(t) := \sigma_j(1) \cdot \sigma_j(3) \cdot \sigma_j(5) \cdot \dots \cdot \sigma_j(t - 1)$$

für sämtliche Zeilen i und sämtliche Spalten j berechnet.

Wir sprechen von **Konvergenz** des iterativen proportionalen Anpassungsverfahrens, sofern die Folge der skalierten Matrizen $A(1), A(2), A(3), \dots$ konvergiert. Der Grenzwert $B := \lim_{t \rightarrow \infty} A(t)$ ist dann die biproportionale Limes-Anpassung.

Aus der Beschreibung des Anpassungsverfahrens geht hervor, dass auch im **nicht-konvergenten Fall** die Einträge der skalierten Matrizen $A(t)$ in sämtlichen Schritten $t \geq 1$ nach oben durch $h := r_+ = s_+$ beschränkt sind. Die Folge der skalierten Matrizen verbleibt also stets in der kompakten Menge $[0, h]^{k \times \ell}$ und verfügt somit über **Häufungspunkte**, deren Struktur es zu analysieren gilt.

Struktur

Satz (Gewichtungsmatrizen der Dimension $2 \times \ell$). Sei (A, r, s) eine Instanz des biproportionalen Anpassungsproblems mit einer Gewichtungsmatrix der Dimension $2 \times \ell$. Bei Anwendung des iterativen proportionalen Anpassungsverfahrens konvergiert die errechnete Folge der Zeilenanpassungen $A(1), A(3), A(5), \dots$ genauso wie die errechnete Folge der Spaltenanpassungen $A(2), A(4), A(6), \dots$

Satz (Zerfall). Sei (A, r, s) eine beliebige Instanz des biproportionalen Anpassungsproblems mit einem Häufungspunkt B . Dann existieren eine disjunkte Zerlegung I_1, I_2, \dots, I_K der Zeilenmenge $\{1, \dots, k\}$ sowie eine disjunkte Zerlegung J_1, J_2, \dots, J_K der Spaltenmenge $\{1, \dots, \ell\}$, sodass A und B in der Form

$$A = \begin{pmatrix} A_{I_1 J_1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ A_{I_K J_1} & \dots & \dots & A_{I_K J_K} \end{pmatrix}$$

beziehungsweise

$$B = \begin{pmatrix} B_{I_1 J_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & B_{I_K J_K} \end{pmatrix}$$

dargestellt werden können, wobei sämtliche Blöcke $A_{I_1 J_1}, A_{I_2 J_2}, \dots, A_{I_K J_K}$ und $B_{I_1 J_1}, B_{I_2 J_2}, \dots, B_{I_K J_K}$ jeweils zusammenhängend sind.

Ausblick

Hypothese (Häufungspunkte). Sei (A, r, s) eine beliebige Instanz des biproportionalen Anpassungsproblems. Dann konvergiert bei Anwendung des iterativen proportionalen Anpassungsverfahrens die Folge der Spaltenanpassungen $A(2), A(4), A(6), \dots$

Beweisansatz. Wir betrachten einen Häufungspunkt $B = \lim_{n \rightarrow \infty} A(t_n)$ entlang einer geraden Schrittfolge (t_n) . Auf Grund der Stetigkeit des L_1 -Abstandes d zweier Matrizen gilt die Grenzwertaussage

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(A(t_n), B) = d(B, B) = 0.$$

Gelingt es nun, die Monotonieaussage

$$d(A(t), B) \geq d(A(t + 2), B)$$

für sämtliche geraden Schritte t zu zeigen, so folgt

$$\lim_{t=2,4,6,\dots} d(A(t), B) = 0$$

und somit schließlich

$$\lim_{t=2,4,6,\dots} A(t) = B.$$

References

1. Csizsár, I.: I-Divergence geometry of probability distributions and minimization problems. *Annals of Probability*, 3:146–158, 1975.
2. Pretzel, O.: Convergence of the iterative scaling procedure for non-negative matrices. *Journal of the London Mathematical Society*, 21:379–384, 1980.
3. Pukelsheim, F. und Simeone, B.: On the Iterative Proportional Fitting Procedure: Structure of Accumulation Points and L1-Error Analysis. *Preprint*, 2009.