

Zusammenfassung

Ein (linearer, stetiger) Operator $T : H \rightarrow H$, H ein Hilbertraum, heißt potenzbeschränkt, falls $\|T^n\| \leq C < \infty$ ist, wobei C von n unabhängig ist. Selbstverständlich sind alle Kontraktionen (d. h. Operatoren T mit $\|T\| \leq 1$) potenzbeschränkt, ebenso alle zu Kontraktionen ähnlichen Operatoren (d. h. Operatoren der Art CTC^{-1} , $C : H \rightarrow H$ ein topologischer Isomorphismus). Nachdem Sz.-Nagy in [1,2] einige hinreichende Kriterien für die Ähnlichkeit zu Kontraktionen gegeben hat und keine Gegenbeispiele bekannt waren, äußerte er die Vermutung, ob die Potenzbeschränktheit eines Operators zur Ähnlichkeit zu einer Kontraktion äquivalent ist. Diese Frage wurde später von Foguel [3] negativ beantwortet, und Lebow [4] erkannte eine weitere Eigenschaft, die zu Kontraktionen ähnliche Operatoren erfüllen: Sie sind polynombeschränkt, siehe die Definition unten. Er zeigte auch gleich, dass Foguels Gegenbeispiel nicht polynombeschränkt ist, weswegen Halmos [5] die Frage in den Raum stellte, ob nun die Äquivalenz von Polynombeschränktheit und Ähnlichkeit zu einer Kontraktion gilt. Dies ist nicht der Fall: Die zu einer Kontraktion ähnlichen Operatoren sind genau die vollständig polynombeschränkten Operatoren.

Elementare Resultate

- Alle normalen Operatoren (und allgemeiner alle hyponormalen Operatoren, d. h. solche mit $TT^* \leq T^*T$) sind Kontraktionen, falls sie potenzbeschränkt sind.
- Ein potenzbeschränkter, invertierbarer Operator mit potenzbeschränkter Inverse ist ähnlich zu einem unitären Operator; im Beweis wird die sogenannte Mittelbarkeit von \mathbb{Z} herangezogen. Dies ist sogar eine vollständige Charakterisierung aller zu unitären Operatoren ähnlichen Operatoren.
- Sowohl zu Kontraktionen ähnliche Operatoren als auch potenzbeschränkte Operatoren haben einen Spektralradius ≤ 1 . Ist er < 1 , so ist der Operator potenzbeschränkt und ähnlich zu einer Kontraktion mit Norm < 1 .
- Als Korollar folgt daraus folgendes Resultat von G.-C. Rota ($r(T)$ bezeichne den Spektralradius von T):

$$r(T) = \inf\{\|S^{-1}TS\|, S : H \rightarrow H \text{ top. Isomorphismus}\}.$$

- Jeder potenzbeschränkte Operator ist der Normlimes von Operatoren, die ähnlich zu Kontraktionen sind.
- Für endlichdimensionale Räume stimmt die Nagy'sche Vermutung; dort kann die Ähnlichkeit zu einer Kontraktion auch noch durch die Jordannormalform charakterisiert werden: Ein Operator ist in diesem Fall genau dann ähnlich zu einer Kontraktion, falls jeder Eigenwert Betrag ≤ 1 hat und jeder zu einem Eigenwert vom Betrage 1 gehörende Jordanblock eindimensional ist.
- Kompakte potenzbeschränkte Operatoren sind zu Kontraktionen ähnlich: Dies folgt aus der Spektraltheorie kompakter Operatoren und den vorherigen Ergebnissen.

Das Gegenbeispiel von Foguel

Grundlage des Foguel'schen Beweises ist folgendes, für jeden zu einer Kontraktion ähnlichen Operator T gültige Resultat ($Z(T) := \{x \in H, T^n x \rightarrow 0\}$, wobei \rightarrow schwache Konvergenz bedeutet):

$$Z(T) \cap (Z(T^*))^\perp = \{0\}$$

Foguel gab nun einen potenzbeschränkten Operator an, der die obige Eigenschaft nicht hat. Hierzu sei S der Rechtsshift auf dem Hilbertraum $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ mit Standardbasis (e_i) , J eine unendliche Teilmenge der natürlichen Zahlen mit der Eigenschaft, dass für $i, j \in J, i < j$ $2i < j$ gilt (z. B. die Menge aller Potenzen der Zahl 3), und Q die orthogonale Projektion auf den von $e_i, i \in J$ erzeugten abgeschlossenen Untervektorraum. Dann ist der auf $\ell^2(\mathbb{N}_0) \oplus \ell^2(\mathbb{N}_0)$ durch die Blockmatrix gegebene Operator

$$T = \begin{pmatrix} S^* & Q \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

das versprochene Gegenbeispiel. Was den Beweis betrifft, soll hier nur erwähnt werden, dass man die Theorie der Dilatationen eines Operators äußerst gewinnbringend anwenden kann:

Hat man einen Operator $T : K \rightarrow K$ und ist ein abgeschlossener Teilraum $H \subset K$ unter T invariant, d. h. $T(H) \subset H$, so liefert die Einschränkung $T|_H$ einen Operator auf H . Ist das nicht der Fall, so kann man immer noch den Operator $PT|_H$ betrachten, wobei P die orthogonale Projektion auf H ist. Dann heißt $PT|_H$ Kompression von T auf H und T eine Dilatation von $PT|_H$ auf K . Die von PT induzierte quadratische Form $(x, y) \mapsto \langle PTx, y \rangle$ ist wirklich die Einschränkung der entsprechenden quadratischen Form von T auf $H \times H$. In diesem Zusammenhang gilt nun das folgende bemerkenswerte Resultat:

Jede Kontraktion besitzt eine unitäre Dilatation.

Der Beweis ist einfach: Sei $T : H \rightarrow H$ und $K = H \oplus H$, wobei H gemäß $h \mapsto (h, 0)$ in K eingebettet sei. Die Dilatation hat dann die Blockmatrizengestalt

$$\begin{pmatrix} T & (1 - TT^*)^{1/2} \\ (1 - T^*T)^{1/2} & -T^* \end{pmatrix}.$$

Hierbei sind die Wurzeln durch den Funktionalkalkül definiert. Wenn man statt $H \oplus H$ für $K \oplus_{n \in \mathbb{Z}} H$ wählt, kann man auf ähnlichem Wege einen unitären Operator U definieren, für den sogar U^n eine Dilatation von T^n ist für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$U = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & (1 - TT^*)^{1/2} & T & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & -T^* & (1 - T^*T)^{1/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

wobei der Eintrag A an der $(0, 0)$ -Position stehe. Solch eine Dilatation heißt starke Dilatation. Sie ist nützlich beim Beweis von Foguel, aber auch an anderer Stelle, nämlich dabei zu zeigen, dass jeder zu einer Kontraktion ähnliche Operator polynombeschränkt ist.

Polynombeschränktheit

Ein Operator T heißt polynombeschränkt, falls $C \geq 0$ existiert derart, dass

$$\|p(T)\| \leq C\|p\|_\infty$$

für jedes Polynom p einer Veränderlichen gilt. Hierbei bezeichnet $\|p\|_\infty$ das Betragsmaximum von p in der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe. Jede Kontraktion $T : H \rightarrow H$ ist polynombeschränkt, denn ist $U : K \rightarrow K$ eine starke Dilatation von T und P die orthogonale Projektion von K auf H , so gilt

$$\|p(T)\| = \|Pp(U)|_H\| \leq \|p(U)\| \leq \|p\|_\infty,$$

wobei die letzte Ungleichung aus dem Funktionalkalkül und der Tatsache, dass das Spektrum von U im Rand der Einheitskreisscheibe liegt, folgt; diese Ungleichung heißt von Neumann'sche Ungleichung, dessen Beweis ohne die Theorie der Dilatationen übrigens viel komplizierter ist. Man zeigt nun mühelos, dass zu Kontraktionen ähnliche Operatoren polynombeschränkt sind. Damit ist Polynombeschränktheit als notwendig für Ähnlichkeit zu einer Kontraktion erkannt und die erwähnte Halmos'sche Frage drängt sich auf. Die Antwort ist nein, und man erhält sie, indem man ein weiteres Mal darüber nachdenkt, in was man nicht notwendig normale Operatoren einsetzen kann: Nämlich in Matrizen $(p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, deren Koeffizienten Polynome sind. Für eine Kontraktion T gilt:

$$\|(p_{ij}(T))\| \leq \sup_{|z|=1} \|(p_{ij}(z))\|$$

Hierbei ist $(p_{ij}(T))$ als Operator auf $\bigoplus_{i=1}^n H$ aufzufassen; auf der rechten Seite steht die Operatornorm bzgl. der Standardnorm des \mathbb{C}^n . Operatoren, die obige Ungleichung mit einem von n und den p_{ij} unabhängigen C auf der rechten Seite erfüllen, heißen vollständig polynombeschränkt. Sie sind tatsächlich zu Kontraktionen ähnlich. Nicht jeder polynombeschränkte Operator ist vollständig polynombeschränkt. Für all dies siehe [6].

Literatur

1. B. Sz.-Nagy, On uniformly bounded linear transformations in Hilbert space, Acta. Sci. Math. (Szeged) **11** (1947), 152–157.
2. B. Sz.-Nagy, Completely continuous operators with uniformly bounded iterates, Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. **4** (1959), 89–92.
3. S. R. Foguel, A counterexample to a problem of Sz.-Nagy, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 788–790.
4. A. Lebow, A power-bounded operator that is not polynomially bounded, Mich. Math. J. **15** (1968), 397–399.
5. P. R. Halmos, Ten problems in Hilbert space, Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), 887–933.
6. G. Pisier, Similarity Problems and Completely Bounded Maps, Springer Lect. Notes Math. **1618**, 2. Auflage (2001).