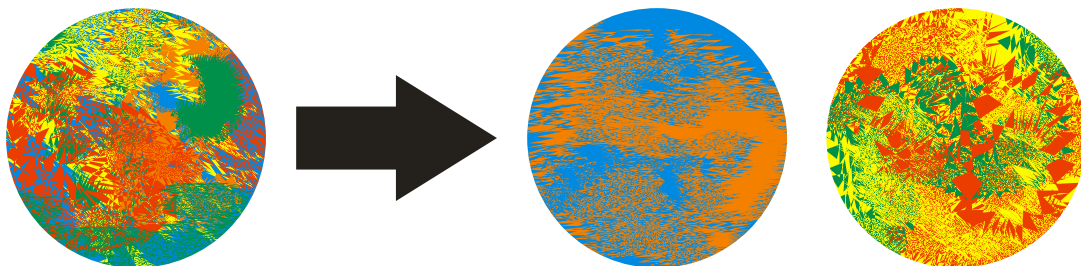


Montag, 26. Januar 2009

Stefan Kahler (TU München)

Das Banach-Tarski-Paradoxon

Es ist eine der spannendsten Konsequenzen aus dem Auswahlaxiom, wenn nicht sogar, wie Jan Mycielski glaubt, „the most surprising result of theoretical mathematics“: Das 1924 von den polnischen Mathematikern S. Banach (1892-1945) und A. Tarski (1902-1983) gefundene und heute als Banach-Tarski-Paradoxon bekannte Resultat, dass eine (Voll-)Kugel so in eine endliche Anzahl von Teilen „zerlegt“ werden kann, dass diese Teile anschließend lückenlos zu zwei Kugeln der ursprünglichen Größe wieder „zusammengesetzt“ werden können. Dabei vermag die nachfolgende schematische Abbildung nicht annähernd auszudrücken, welch komplizierte Gestalt die auftretenden Kugelteile tatsächlich besitzen (müssen).



Vielleicht noch verblüffender ist es, dass es – nach der sog. starken Form des Banach-Tarski-Paradoxons – sogar möglich ist, eine Kugel von der Größe einer Erbse in endlich viele Teile zu zerlegen und diese dann lückenlos zu einer Kugel von der Größe der Sonne wieder zusammenzusetzen. Diese Entdeckungen hatten und haben nicht zu Unrecht eine hohe Öffentlichkeitswirksamkeit, verstoßen sie doch gegen jegliche physikalische oder alltägliche Erfahrung und Intuition. Aber auch innerhalb der Mathematiker-Gemeinde sind sie vor dem Hintergrund der modernen Maßtheorie immer noch alles andere als eine Selbstverständlichkeit, da ein- oder zweidimensionale Analoga nachweislich nicht existieren.

Wir wollen zunächst die nötigen mathematischen Grundlagen zusammenstellen und anschließend das Banach-Tarski-Paradoxon präzise formulieren sowie seinen nicht einfachen Beweis – auch den der starken Form – skizzieren. Nicht zu kurz kommen sollen auch der historische Aspekt und (durchaus aktuelle) Anwendungen. Ich freue mich auf eine abschließende Diskussion vor einem mathematischen, physikalischen oder philosophischen Kontext. Es werden keine über das Grundstudium hinausgehenden Vorkenntnisse erwartet, und auch interessierte Nichtmathematiker sind herzlich willkommen!