Bruchmechanik - mathematische Sichtweise via Γ-Konvergenz und BV Funktionen

Die Bruchmechanik beschäftigt sich mit der Frage, wie sich brüchige Materialen unter Deformation verhalten, insbesondere wie und wo mögliche Brüche entstehen. Erkenntnisse auf diesem Gebiet beruhen nicht nur auf experimentellen Analysen, sondern auch theoretische Überlegungen in der Mathematik tragen dazu bei. Man versucht, mittels Variationsprinzip die Energie des Objekts bei gegebenen Randbedingungen zu minimieren. Wir betrachten als einfaches Beispiel einen Stab der Länge l, die Funktion $y : (0,l) \to \mathbb{R}$ bezeichne die (longitudinale) Deformation. Dann schreibt sich die Griffith-Energie als

$$E(y) := \int_0^l f(\dot{y}) + \beta|S(y)|,$$

wobei die Funktion f das elastische Verhalten im ungebrochenen Bereich beschreibt, die Konstante β für die „Energiekosten" eines Bruches stehen und $|S(y)|$ die Anzahl an Sprungstellen bezeichnet. Man erkennt, dass die Energie sowohl einen Term für das elastische als auch einen für das brüchige Regime enthält. Unser Ziel ist es, folgendes Minimierungsproblem zu lösen, wobei $y_0 = y(0)$, $y_l = y(l)$ die vorgegebenen Randwerte bezeichne:

$$\min\{E(y), y(0) = y_0, y(l) = y_l\}$$

Es stellt sich die Frage, was ein geeigneter Funktionenraum für die Deformationsfunktion y darstellt. Wir werden motivieren, weshalb gerade Funktionen beschränkter Variation (BV Funktionen) eine geeignete Wahl sind und besprechen kurz ihre Eigenschaften. Darüberhinaus beschäftigen wir uns mit der Herkunft des Griffith-Energiefunktionals und werden sehen, dass es sich als geeigneter Grenzwert von diskreten Energiefunktionalen ergibt. Hierbei werden wir auch auf das Konzept der Gamma-Konvergenz zu sprechen kommen. Falls es die Zeit zulässt, soll auch noch auf mehrdimensionale Probleme eingegangen werden. Als Vorkenntnisse dürften grundlegende Analysis und ein wenig Maßtheorie genügen.